דו״ח מסכם בנושא המאמר :
מידול אובייקטים בעלי מבטים מורכבים –
בהנדסה הפוכה ע״י שימוש בקואטרניונים דואליים.

מגיש : דב ברקאי
פרמטר טכנולוגיות

הרקע:

הנדסה הפוכה או Reverse Engineering הוא תהליך של גילוי עקרונות טכנולוגיים והנדסיים של מוצר דרך ניתוח המבנה שלו ואופן פעולתו. לרוב, תהליך זה כולל פירוק המוצר למרכיבים ולנתח באופן פרטני את דרך פעולתם של המרכיבים. לרוב, תהליך ההנדסה ההפוכה מבוצע מתוך כוונה להרכיב מוצר חדש הפועל בצורה דומה וכך להעתיק למעשה את המקור.
לעתים קרובות צבאות משתמשים בהנדסה הפוכה על מנת להעתיק טכנולוגיות, מכשירים או מידע של מדינות אחרות, שהושגו על ידי חיילים רגילים בשטח או על ידי מודיעין צבאי. בזמן מלחמת העולם השנייה ובזמן המלחמה הקרה השתמשו רבות בהנדסה הפוכה. דוגמה ידועה ממלחמת העולם השנייה היא הג׳ריקן - כוחות בריטים ואמריקאים הבחינו שלגרמנים היו מכלים של נפט בעלי עיצוב מעולה. הם השתמשו בהנדסה הפוכה על מנת להעתיק מכלים אלו. הם קראו להם ״ג׳רי-קן״ (Jerry can, ״מכלים של גרמנים״).

הדרך השכיחה להנדסה הפוכה בראייה ממוחשבת היא לחשב את שלושת המימדים של ע״י מבטים (דפינות) שונים במיוחד בגופים מורכבים.
מהשיטות הרבות הקיימות, ה- ICP (Iterative Closest Point) היא הפופולארית ביותר.
אולם לשיטה המסורתית הזו יש מספר חסרונות.
במאמר זה נלמד שיטה משופרת הנקראת IDCP (Iterative Dual Closest Point).

השיפור מומחש בשלושה אספקטים :

1.ארגון הנתונים- תכנון מבנה רולטה.
ניתן לרשת את השטח בתאים כתלות במספר הנקודות ולשים את נתוני הנקודות בתוך התאים השונים.
שיטה זו יכולה להיות אפקטיבית לחיפוש נקודות שכנות.

2.ליבת השיפור של שיטת ה -IDCP הוא שכאשר אנו בונים זוגות נקודות, אנו לא משתמשים רק במינימום מרחק אוקלידי_ אלא מתייחסים גם להשוואה של הנורמלים של הנקודות הרצויות. הדבר יגדיל את הדיוק ויקטין את זמן האיטרציה בהתאמה.

3.השיפור השלישי הוא האינטגרציה של שני זוגות המבטים.
אנו נותנים ביטוי לאינטגרציה של שני סטים של משולשים ע"י מניעת קונפליקט בטופולוגיה של המידול.

1. מבוא:

בהנדסה הפוכה כאשר אנו ממחשבים את השטחים החיצוניים של המודל, בדרך כלל קשה להשיג את כל הנתונים במערכת קואורדינטות אחת.

ישנם שני גורמים לכך :

1. אם הרכיב הוא גדול ומעבר לתחום המדידה של המכונה או צריכים להעביר את הרכיב או את מיקום המכונה כדי להתאים את המדידה הבאה.
ואז בעצם הקואורדינטות המקוריות אינן קיימות עוד.
לדוגמא, כאשר אנו משתמשים במסגרת מדידה ATOS,למדידת מכונית, אנו מקבלים יותר מ-30 מערכות שונות של קואורדינטות.

2.לעיתים אף על פי שאנחנו ממדלים את רוב חלקי הנתונים של המודל בדפינה אחת,במודלים מורכבים חלק מהפרטים חסומים לגישה וכך נמנע מאיתנו לבצע מדידה כדי למחשב את המודל כולו.

כאשר הרכיב הוא תלת מימדי אנו צריכים את כל נתוני המשטחים החיצוניים ולא רק חלק מהם. לכן נזקק למספר דפינות כדי לקבל נתוני מידול רבים ובמערכות קואורדינטות שונות.
הבעיה המרכזית המתגלה היא שהנתונים שהושגו מדפינות רבות, חייבים להתאים למערכת קואורדינטות אחת משותפת התאמה זו הנקראת רגיסטרציה.

אחד הפתרונות הטובים הוא שהמודל המועתק ממוקם בשולחן מסתובב והנתונים מושגים בזוויות שולחן שונות אשר מתכנסים בסופו של דבר למערכת קואורדינטות אחת כדוגמת CYBER.

החיסרון של השיטה הוא שמהחלק העליון והתחתון של המודל לא ניתן לקרוא נתונים.

יתרון אחר הוא שימוש בשלוש נקודות לא לינאריות אשר נמדדות בכל שתי מערכות קואורדינטות כרפרנס לחישוב מטריצת הטרנספורמציה אך הקושי הוא איך למקם את שלושת הנקודות הלא לינאריות הללו.
אף על פי כן,לעיתים נוכל לעשות שימוש בתכונות מיוחדות של המודל אך הדיוק ייפגע.

הפתרון האחרון הוא איטרציה מקורבת של נקודת קרובות, ICP, אשר מכילות שני צעדים:

*הראשון הוא העתקה תחילית ראשונה כדי לקבל שני סטים של נתונים המותאמים ביניהם בצורה מקורבת.

*השני הוא לעדכן את ההעתקה התחילית למצב מדוייק.

במאמר זה,פתרון הרגיסטרציה מבוסס על על נקודה ומשולש.

תכולת המאמר:

1. מעבר על שיטות אחרות.
2.התייחסות לסידור נתונים תחת קונספט חוקים חדש.
3.התייחסות לליבת שיטת ה- IDCP.
4.הצגת הדרך המפורטת לאיחוד שני סטים של משולשים.
5.הדמיית השיטה ולאחר מכן מסקנת הניסוי.

2. התאמה ואירגון רולטת הנתונים

2.1 הקונספט:

אנו מניחים כי הטופולוגיה של הנקודות בכל סט נתונים הוקמו, כלומר אנו בונים את שיטת רשת משולשים לכל מבט מורכב במודל.
כוחה של השיטה הוא צריכה נמוכה של משאבי הזמן הנדרשים לתהליך.
נדרש מבנה נתונים יעיל לארגון נתוני הנקודות.

לכל ציוד שהוא שאנו משתמשים למחשוב המשטחים של המודלים , הנתונים שלנו המתקבלים בכל דפינה יכולים להיות משוקפים למישור בכוון הרדיאלי של המדידה (רולטה).
הדבר נקבע על ידי רמת הדיוק של מכונת המדידה .
לכן כאשר אנו מוצאים זוגות של נקודות מקורבות , אנו עדיין משתמשים באינפורמציה של תלת מימד .
השיטה האיטרטיבית לנקודות קרובות היא לשים את נקודות הנתונים בתוך רשת ואז לעשות שימוש בתאי הרשת.
כדי להמחיש את החידוש, שיטה זו יכולה להקטין באופן משמעותי את הזמן המתבזבז לחיפוש האופרטור.
כאן מובאת בניה שונה של רשת , שונה מזו של רשת מלבנים אחידה .
משתמשים בלולאות ברדיוסים שונים ומשתמשים במיון שווה אשר מתחיל ממרכז משותף, לחלוקה שלמה של השטח לתאים רבים .
לתאים אלה יש אותו יחידת שטח .
מטילים את הנתונים על גבי השטח וממקמים את התאים במקומות שקיימות נקודות נתונים .

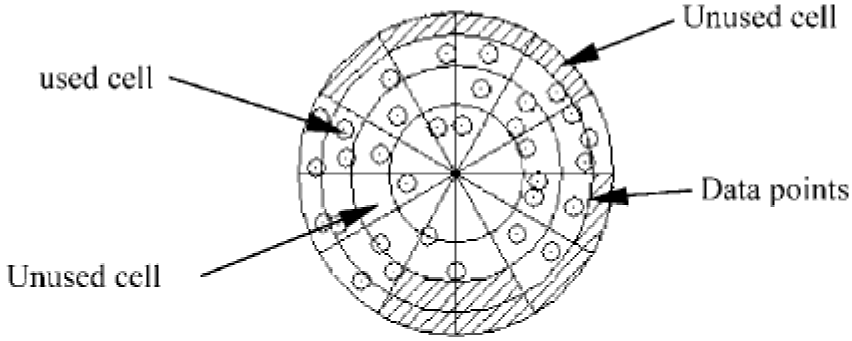


Fig. 1. The concept of the roulette.

ב- fig1. מתואר מבנה רולטה.
מוצאים מספר תאים אשר לא בשימוש .
חלקם נמצאים בחלק מהשטח ובעוד שאחרים נמצאים בגבול השטח . – אלו האזורים המקווקווים.
לתאים המקווקווים לא נחוץ שיהיה שטח אמיתי.

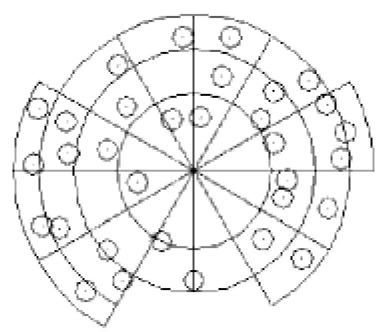


Fig. 2. The roulette actually used.

ב- fig2. בונים את המבנה גלגל הרולטה .
בהשוואה עם רשת משולשים אחידים , הרולטה אינה מבזבזת את גבולות האזור אשר אינם בשימוש .
כאשר אנו מוצאים זוגות של נקודות קרובות , קרוב לוודאי שהנקודות אשר בשימוש ממוקמות בגבול האזור או קרוב לגבול האזור .

2.2 מבנה הנתונים

קיימים מספר מבני הנתונים אשר מופיעים בנספח המאמר.

RAD II אוסף את הרדיוסים הפנימיים והחיצוניים של המבנה.
מבנה ה- COLUMN הנו שרשרת בודדה. הוא קולט את מידע בתאים הפנימיים ביותר והחיצוניים ביותר כאחד.
בכל תא יתאחסנו נקודות אשר נפלו לתוכו וגם את נקודות התאים השכנות.
חשוב מאוד כי הנקודות הקרובות לא יהיו כך בתוך התא אלא גם בתאים השכנים.
המבנה המוצע – הרולטה, אשר משלבת בתוכה את RADII ו- COLUMNS למבנה שלם.
מספר העמודות יכול להיות גדול אך הכמות שנשתמש בה תהיה תלויה במספר נקודות הנתונים. המרכז המשותף הוא הממוצע לכל נקודות הנתונים.

2.3 התאמתה של הרולטה

כאשר מניחים נקודות נתונים לתוך תאים של הרולטה אנו מקווים כי החלוקה תהיה שווה כך שבכל תא יכולה להיות נקודה אחת - זהו המצב האופטמלי.
למרות כך , בגלל ההתפלגות של סט הנתונים אין אנו יכולים להשיג את המצב האופטימלי, אך אנו חייבים לנסות להשיג מטרה זו קרובה ככל האפשר.
מצד אחד אם הנקודות בתוך התאים הינם מאוד צפופים הדרך יגרום לחישובי יתר לא רצויים.
מצד שני אם יהיו תאים ללא נקודות בתוכם הדבר יגרום ליעילות חישוב נמוכה של תאים ריקים. לכן אנו חייבים לכוונן את תאי הרולטה ולהתאימם לכל הנתונים.

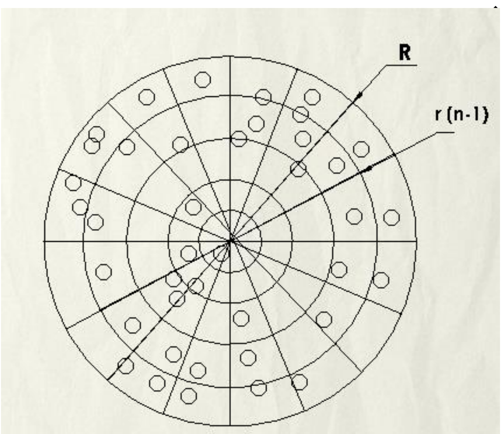
נניח כי מספר הנתונים הוא N ונתונה הקואורדינטה (X1 Y1 Z1) של הנקודה.

הרדיוס הגדול ביותר הוא : R . נניח מספר התאים שווה ל-N . לכל הלולאות היוצרות תאים יש אותו שטח, והתאים ממוקמים בלולאה החיצונית הם כמעט ריבועיים. תאים אלה יתנו לנו אחידות והתפלגות סבירה של תאים הנופלים באזור הגבול או ליד הגבולות.

מה שאנו רוצים להשיג הוא: מספר הלולאות n, מספר העמודות m, ורדיוס הלולאה r_j
.

כאן אם r_{n-1} הינו נתון מתקבל, קל מאוד לחשב שאר ה- r_j בהתייחס לתנאי שכל מרכזי הלולאות המעגלית הינם משותפים . ובעלי אותו שטח.

עתה נתאר את השיטה למציאת m , n ו- r_{n-1}.



$$\begin{cases} \pi R^2 = \left(\pi R^2 - \pi r_{n-1}^2\right) n & (1a) \\ n = NI\alpha m & (1b) \\ 2\pi R = \beta\left(R - r_{n-1}\right) m & (1c) \end{cases}$$

כאשר α ו– β הם מקדמים .
כאשר מספר התאים שווה למספר הנתונים α =1.
ב- (1c) אנו מקבלים קירוב לתאים ריבועיים בתאי הגבול, כאשר β =1. אם נגדיל את β, מיקום התא הריבועי יזוז מהגבול לאזור הפנימי של הרולטה .

$$2\pi R^3\alpha / N\beta = \left(R + r_{n-1}\right)\left(R - r_{n-1}\right)^2 \qquad (2)$$

שיטה נומרית לקבלת r מופיעה המשוואה (2) הטווח הוא R- R/2 .
שיטת "החצי" מתחילה לרוץ בלולאה עד אשר הערך בצד ימין של המשוואה יהיה שווה לערך בצד שמאל.
כמו שהזכרנו קודם ,מספר העמודות יכול להיות גדול ולכן אנו חייבים להוסיף את האילוץ:

r_{n-1} =R-2ΠR/βMAX

וזאת כדי להבטיח מכונות באחסון נתונים. חילוף ממשוואה (1c)

2.4 מציאת זוגות של נקודות קרובות

נניח שישנם שני סטים של נתונים:
M_r , M_L. אנו רוצים לקבל נקודות קרובות : P_{ri} , P_{Li} .

הצעדים הינם :

1. עצב את נתוני סט M_L למבנה הרולטה .

2. לכל נקודה P_r מ- M_r , בדוק מי נופל לתוך תא. אם אין תא אז הנקודה תיזרק ותצא מהמשחק.

3. חפש את כל הנקודות בתא זה וגם בתאים השכנים למעלה למטה ימינה שמאלה.

אם ישנה נקודה אז מצא את הנקודה הקרובה ביותר - P_L .

3.אלגוריתם של IDCP

3.1התאוריה הבסיסית של ICP

תאורית IDCP מתבססת על ICP ולכן נתארה בקצרה.

נניח שזוגות של נקודות קרובות מסומנים ע"י P_{ri} , P_{Li} מספר הזוגות הוא N .

נחפש טרנספורמציה : $P_L = R(P_r) + P_0$

מסט ימני לסט נתונים שמאלי.

P_0 - מבטא הזזה .

$R(P_r)$ -מטריצת בסיבוב .

אידאלית - אנו מקווים שההבדל בין P_L ו- $R(P_r)+P_0$ הוא קטן ואפשרי.

ואז הטעות המינימלי הינה : $\sum_{i=1}^{n} [e]^2$

כאשר : $e_i = P_L - R(P_r) - P_0$

e – טעות מינימלית .

כדי למנוע את מורכבות בחיפוש P_0 , ו – R באותו זמן .

ה- e_i ייכתב מחדש כך :

נניח מרכז סט ימני הוא P_r ושמאלי הוא P_L נחליף את הקואורדינאטות שלהם :

$P_{Li}' = P_{Li} - P_l$

$P_{ri}' = P_{ri} - P_r$

אז נוסחאות הטעות תהיה :

$e_i = P_{Li}' - R(P_{ri}') - P_0'$

כאשר : $P_0' = -P_L - R P_0 (P_r)$

סיכום הריבועים יהיה איפוא :

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|P'_{l,i}-R(P'_{r,i})\right\|^2-2P'_0\sum_{i=1}^{n}\left[P'_{l,i}-R(P'_{r,i})\right]+n\left\|P'_0\right\|^2 \quad (3)$$

האיבר האמצעי יהיה שווה ל- o.
האיברים הראשון והשלישי אינם יכולים להיות שליליים לכן המינימום של הנוסחא יכולה להיפתר ע״י חלקים דיסקרטיים.
ברור כי הערך המינימלי של האיבר השלישי הוא O ולכן האיבר הראשון יכול להיכתב :
כפל מקוצר

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|P'_{l,i}\right\|^2-2\sum_{i=1}^{n}P'_{l,i}R(P'_{r,i})+\sum_{i=1}^{n}\left\|R(P'_{r,i})\right\|^2 \quad (4)$$

בנוסחא זו הערך של האיבר הראשון והשלישי לא ישתנו יותר מהרגע ש – P_{ri} , P_{Li} נתגלו.

הבעיה היא עתה היא לפשט ולקבל :

$$\sum_{i=1}^{n}P'_{l,i}R(P'_{r,i}) \quad (5)$$

מנקודת ראות גיאומטרית בנוסחא 5, רגיסטרציה מושלמת תתרחש, אם קיימים שני זוגות וקטורים חופפים אשר מוגדרים ע״י שני זוגות של נקודות בעלי מרכז משותף.

להלן סיכום שיטת ICP :

1. נתונים שני סטים של נתונים - M_L , - M_r ומטריצת רוטציה - R_0 נתונים . כמו כן J>0 נתון .

2. מתחילים בהשוואה M_{L_0} M_L = . (M_r) R = M_{r_0} K=0.

3. חישוב זוגות נקודות קרובות P_{rk} , P_{Lk} בסטים M_{rk} , M_{LK}

4. חישוב מטריצת הרוטציה R_{K+1} ע״י הרצת מקסימום של נוסחא (4) .

5. עדכון : M_{Lk+1} M_L =

= M_L $M_{L(K+1)}$ - = R_{K+1} $M_{r(k+1)}$ (M_{rk})+ P_{lk} - P_{rk}

6 . אם : :J< $[e]^{-}_{k+1}$ – $[e]^{-}_{k+1}$ <== קבלת ערך סופי.

אם לא, הגדל את K וחזרה על השלבים.

3.2 אלגוריתם של IDCP

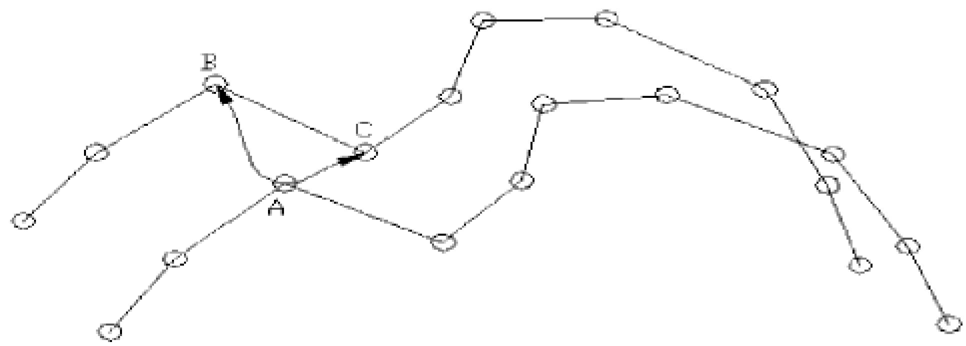


Fig. 3. The comparison of different pairs.

ב-fig 3, נניח כי נקודות C,B שייכות לסט נתונים M_L נקודה A שייכת ל- M_r. אם משתמשים ב -ICP , נקודה C תהיה הכי דומה ל-A .
ברור כי סוג זה של זוג הוא לא הכי טוב משום שנקודות A ו- B יכלו להיות כזוג מושלם כי הם משקפים את המצב הנכון.

לכן פותח אלגוריתם חדש IDCP אשר לוקח הנקודה הנכונה בחשבון .

ראשית, וקטור היחידה הנורמלית בכל נקודה P מוגדרת :

$$u_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}, \quad \hat{u}_p = \frac{u_P}{\|u_i\|} P \qquad (6)$$

כאשר : A_i – שטח המשולש המצורף לנקודה P.

^u – וקטור יחידה של השטח הזה .

כדי ליישם את החישוב ישנם עוד מספר מבנים : VERTEX, TRIANGLE, TRIANGULATION.

מבנים אלה אפשריים כאשר מנקודה A כל המשולשים אשר משותפים לנקודה יש להם קודקוד אחד- יכולים לעבור , מסט לסט .

u_r, u_L מציינים וקטור יחידה בשני הסטים . חוקי המרחק האוקלידי מוחלף בנוסחא משולבת, עם מרחב אוקלידי ווקטורי יחידה מזוגות הנקודות הקרובות :

$$MIN(\|P_1 - P_r\|^2 + w\|\hat{u}_l - \hat{u}_r\|^2) \qquad (7)$$

w- מקדם משקל .

בהקשר לחוק חדש זה סכום הריבועים משתנה ל-

$$E = \sum_{i=1}^{n}(\|e_i\|^2 + w\|d_i\|^2)$$
$$e_i = P_1 - R(P_r) - P_{0,} \quad d_i = (\hat{u}_l - R(\hat{u}_r))$$

בהסתמך על תאוריית הקואטרניון , הפתרון יהיה :

$$\sum_{i=1}^{n}\|P'_{i,i} - R(P'_{r,i})\|^2 - 2P'_0\sum_{i=1}^{n}\left[P'_{l,i} - R(P'_{r,i})\right] + \qquad (8)$$
$$+n\|P'_0\|^2 + w\sum_{i=1}^{n}\|\hat{u}_{l,i} - R(\hat{u}_{r,i})\|^2$$

הנוסחא ניתנת לפישוט :

$$\sum_{i=1}^{n}\|P'_{i,i}\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n}P'_{l,i}R(P'_{r,i}) + \sum_{i=1}^{n}\|R(P'_{r,i})\|^2 \qquad (9)$$
$$+w\left(\sum_{i=1}^{n}\|\hat{u}_{i,i}\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_{l,i}R(\hat{u}_{r,i}) + \sum_{i=1}^{n}\|R(\hat{u}_{r,i})\|^2\right)$$

המצב האחרון הוא מציאת ערך מקסימלי של :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(P'_{l,i}R(P'_{r,i})\right)+w\left(\hat{u}_{l,i}R(P'_{r,i})\right) \qquad (10)$$

q מוצג כקואטרניון : $q = q_0 + iq_x + iq_y + iq_z$

אנו משתמשים בקואטרניון כדי לפתור את נוסחא 10 .

את מטריצת הרוטציה ניתן לבטא כך :

$$R=\begin{bmatrix} q_0^2+q_x^2-q_y^2-q_z^2 & 2(q_xq_y-q_0q_z) & 2(q_xq_z+q_0q_y) \\ 2(q_yq_x+q_0q_z) & q_0^2-q_x^2+q_y^2-q_z^2 & 2(q_yq_z+q_0q_x) \\ 2(q_zq_x+q_0q_y) & 2(q_zq_y+q_0q_x) & 2(q_0^2-q_x^2-q_y^2+q_z^2) \end{bmatrix} \qquad (11)$$

בהתבסס על קואטרניון , תשונה נוסחא (10) בצורה $q^{\mathrm{T}}Nq$.

כאשר :

$$N=\begin{bmatrix} S_{xx}+S_{yy}+S_{zz} & S_{yz}-S_{zy} & S_{zx}-S_{xz} & Sxy-S_{yx} \\ S_{yz-S_{zy}} & S_{xx}-S_{yy}-S_{zz} & S_{xy}+S_{yx} & S_{zx}+S_{xz} \\ S_{zx}-S_{xz} & S_{xy}+S_{yx} & -S_{xx}+S_{yy}-S_{zz} & S_{yz}+S_{zy} \\ S_{xy}-S_{yx} & S_{zx}+S_{xz} & S_{yz}+S_{zy} & -S_{xx}-S_{yy}+S_{zz} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

כאשר :

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_{r,i}y_{l,i}+wa_{r,i}b_{i,i})$$

$$S_{xz} = \sum_{i=1}^{n} (x_{r,i} z_{l,i} + w a_{r,i} c_{i,i})$$

וכן הלאה .

כאן : $p' = x_i + y_j + z_k$ ו- $u = a_i + b_j + c_k$

קאוטרניון היחידה הממקסם את $q^T N q$ הוא הוקטור העצמי התלוי לרוב בערכים בעצמיים החיוביים של המטריצה N .

עתה מבצעים איטרציה בדיוק כמו האלגוריתם ICP בכדי להשלים את הרגיסטרציה .

מנקודת מבט גאומטרית, ה- IDCP, רגיסטרציה מושלמת תהיה מדויקת רק אם המיקום של זוג וקטורים וזוג הוקטורים הנורמלים חופפים בהתאמה .

3.3 התכנסות של אלגוריתם IDCP :

ההתכנסות היא החלק החשוב ביותר בכל אלגוריתם אשר פועל בעזרת איטרציות .

ההתכנסות של ה IDCP הינה קבועה. ראשית אנו מניחים תנאים מוקדמים :

פונקצית הטעות הינה סכום ריבועים המתוארת כך :

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} (\|e_{ik}\|^2 + w\|d_{ik}\|^2)$$

כאשר : $e_i = P_{Li} - R(P_{rik}) - P_{ok}$

ו - $d_i = u_{Li} - R_k(u_{rik})$

הם מנימליים.

התהליך החליפי מיוצג ע"י : $p_{r(k+1)} = R_k\,(P_{rk}) + P_{ok}$

האיטרציה K+1 מתחילה עם מציאת נקודות תואמות : $p_{L(k+1)}$ ל- $p_{r(k+1)}$

בסיומה של איטרציה , האלגוריתם חייב להתכנס מונוטונית לערך מינימלי.

אם התנאים המוקדמים לא יהיו קיימים , ההתכנסות לא תהיה מובטחת ,

להלן שתי הגבלות חשובות :

1. אי הסכמה לנקודות גבול להיות חלק מזוגות הנקודות .

באלגוריתם שלנו , אימוץ מבנה הרולטה עושה את העבודה היטב .

2. אם (P_{rk}) מוכל ב- $p_{r(k+1)}$

ההתכנסות יכולה להיות מוכחת בדרך פשוטה .

4. האינטגרציה של רשת משולשים :

אחרי הרגיסטרציה המדויקת אשר בוצעה ע"י אלגוריתם IDCP,שני הסטים של הנתונים יונחו אחד על השני .

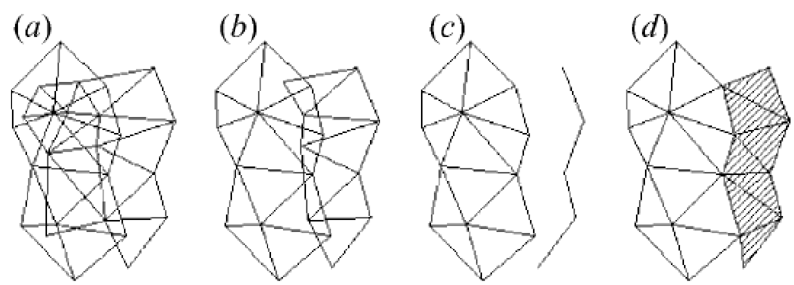


Fig. 4. Integration of meshes.

נראה כי משולשים רבים מצטלבים וחופפים כמו שמופיע ב : fig 4(a)

עתה נדרש לבנות טופולוגיה נכונה , ולאחד בין שני הסטים של הנתונים .
האינטרגציה מכילה שלושה צעדים :

1. הסרה של משולשים חופפים.
2. מציאת היקף של גבולות בעלי מתאם .
3. ביצוע " שילוש " .

מההבדלים בין 4 a) ל- (b) 4 אנו רואים כי מספר משולשים וקודקודים ב- M_r נמחקו.
תחילה הקודקודים צריכים להיות שייכים ל- P_{ri} בזוג נקודות (P_{ri} P_{Li},) .
ולאחר מכן קודקודים אלה אינם צריכים לבוא בזוגות.
נקודות אשר נמצאות על הגבול ב- M_L. ברגע שהקודקודים זוהו, ניתן לאחד משולשים יחד עם קודקודים אלו .
משולשים אלו גם יכולים להימחק . ב- fig 4 (b) רואים את התוצאה הזו .
צעד נוסף הוא לנטר את המשולש אשר חוצה את הגבול בסט M_L ולמחוק אותו .
ע"י שימוש בשתי נקודות בגבול של M_L , הנקודות החופפות ימצאו גם בגבול סט M_r .
באותה הדרך אנו מקבלים גבול מותאם ומוגדר של M_r.
ניתן לראות זאת ב- fig 4 (C).
הצעד האחרון לאינטגרציה יעשה ע"י ביצוע "שילוש" למרווח בין שני סטי הנתונים.
אנו מזהים את שני צידי המרווח ואת שתי ההגבלות :
אחת מההגבלות היא יצור משולשים החייבים להימצא בתוך שני הצדדים.
שאר המשולשים יהוו את הטופולוגיה האמיתית.
לצורך כך משתמשים בשיטה אחרת אשר דנה באילוצי שילוש של דלאוני . ע"י כך אנו מקבלים התאמה מלאה כמוראה ב – fig 4(d). בציור זה אנו מבחינים במשולשים אשר צמצמו את המרווח בין שני הסטים .

5.מסקנות הניסוי :

להלן דוגמא של חלק מגג המכונית .
בעזרת ההליך של האלגוריתם IDCP נוכל להמחיש זאת בפרוטרוט :
כאשר אנו מנתחים את גג המכונית יש עלינו לאמץ תצוגות מרובות, כאן ניתן שני חלקים של צפייה :
אחד מהם נקרא גג שמאל והשני גג ימין (fig 4, fig 5) .

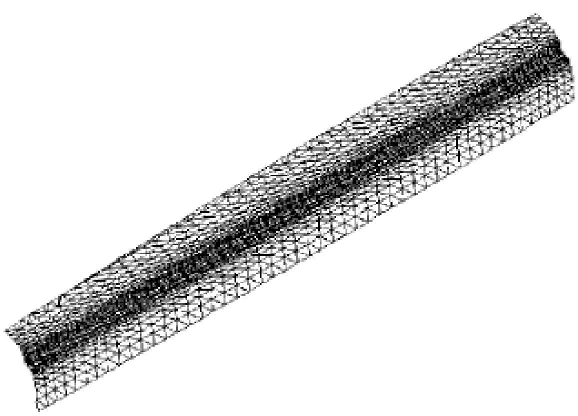


Fig. 6. The right roof.

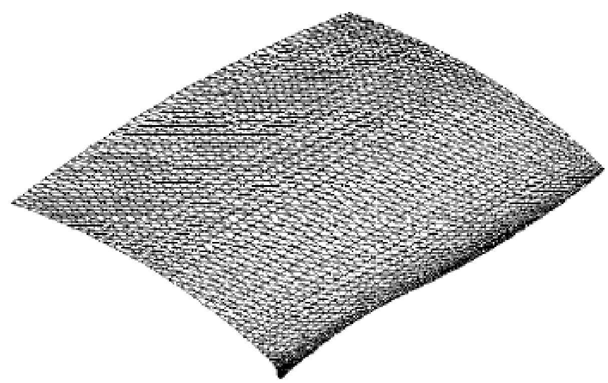


Fig. 5. The left roof.

גג שמאל הוא החלק העיקרי של גג המכונית, הוא מורכב מ – 1793 משטחים ו- 3361 משולשים .
גג ימין הוא האזור של החיבור העליון ושל צד המכונית הוא מורכב מ- 1249 משטחים ו- 2298 משולשים.

כמו כל הדרישות באלגוריתם האיטרציה,ניתן לחבר את שני החלקים בגסות.(fig 7) בכדי לקבל הגדלה של הפינה .

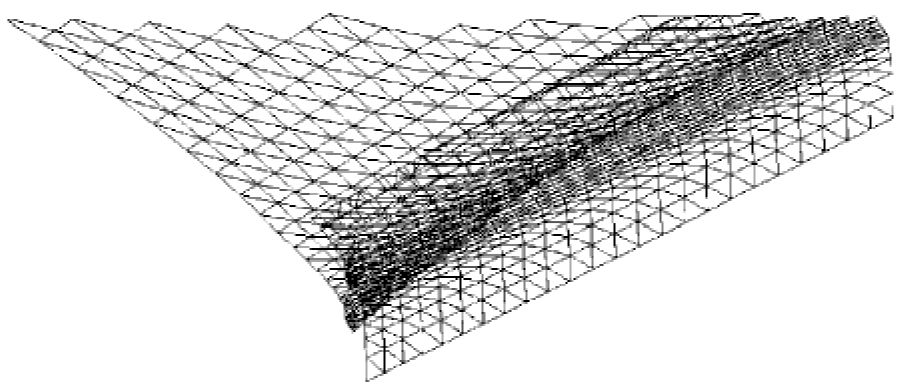


Fig. 7. The initial transformation.

ברור שיש עדיין מרחק גדול בין השניים, כך שאנחנו לא יכולים לקבל תוצאה זו .
נתוני רולטת המבנה נבנה ע״י משוואה (2) , במקרה זה אנו קובעים . קובע לנו כי
החלקים של גג שמאל יהיו קרובים ביותר לאלו של גג ימין . fig 8.

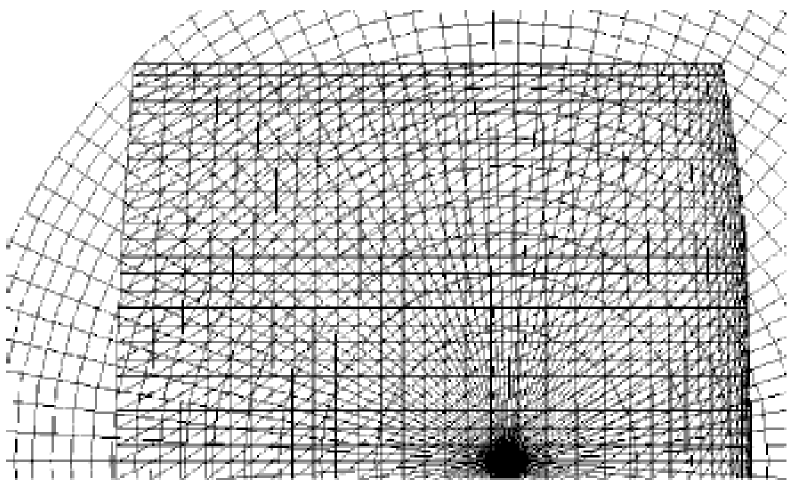


Fig. 8. The roulette structure.

ואז כל נורמל של משטח מחושב עבור הזוגות הקרובים. fig 9.

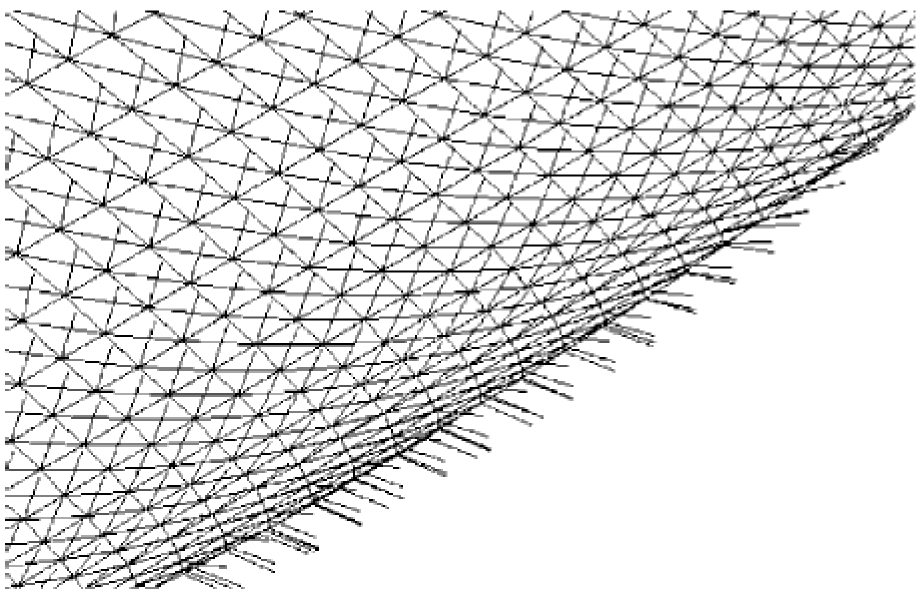


Fig. 9. Normals of vertices.

אלגוריתם IDCP שהוצג במאמר זה באמצעות חוקיי הדואליות משמש כדי למצוא נקודות הקרובות ביותר בכדי לקבל את קווטרניוני התשובה .

יש מקדם משקל w במשוואה (7) , ככל שהערך של w עולה כך ההשפעה על הפתרון כולו גדלה .

עם זאת , אם w=0 , נקבל את אלגוריתם ICP הבסיסי .

ההשוואה של דיוק ומהירות ההתכנסות של ICP ו- IDCP שבו w =0 ו –w =10 ניתנים ב- fig 10.

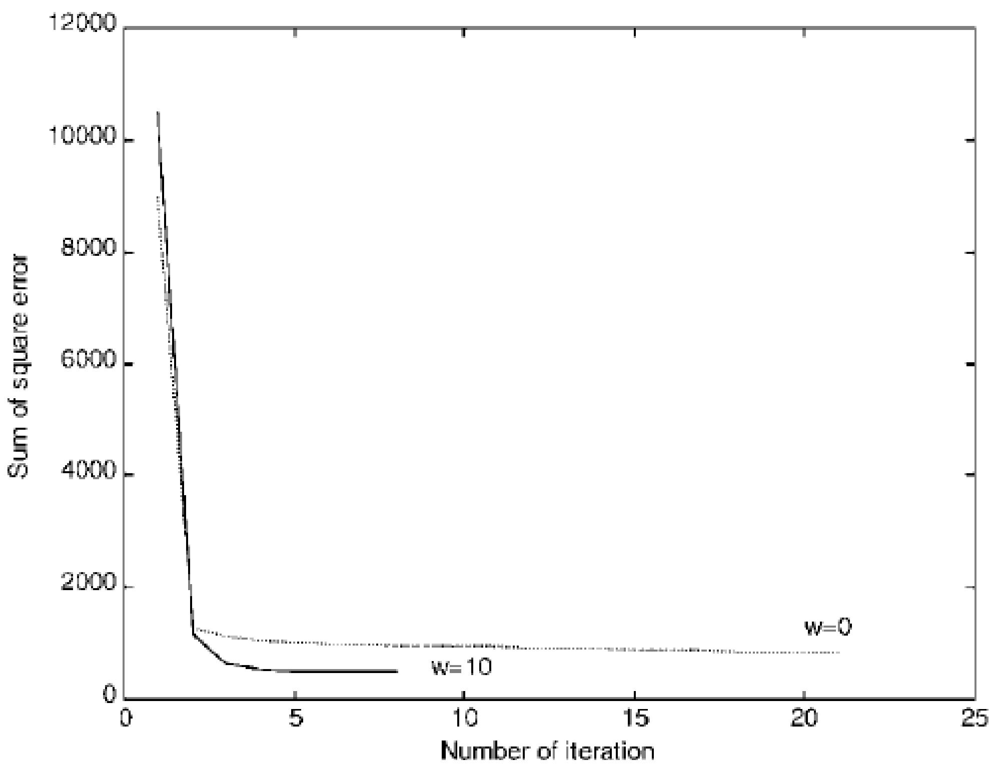


Fig. 10. The comparison of ICP and IDCP.

בשלב האחרון של אלגוריתם IDCP שילבנו את שתי מערכות הנתונים על-ידי מחיקת משולשים חופפים שגורמים לפער ביניהם להופיע. fig 11.

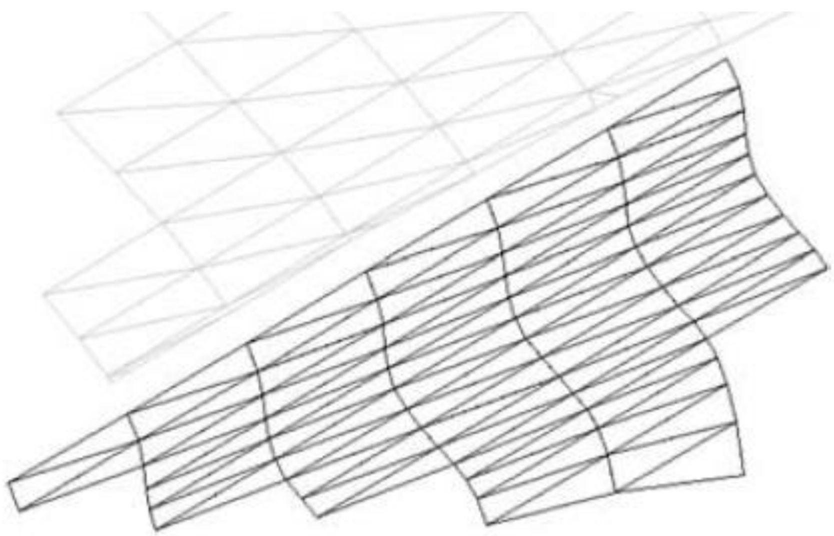


Fig. 11. The gap between the data sets.

ואז ניתן לבצע טריאנגולציה (שילוש) כדי לכסות את הפער ולחבר את שתי הקבוצות.
fig **12**.

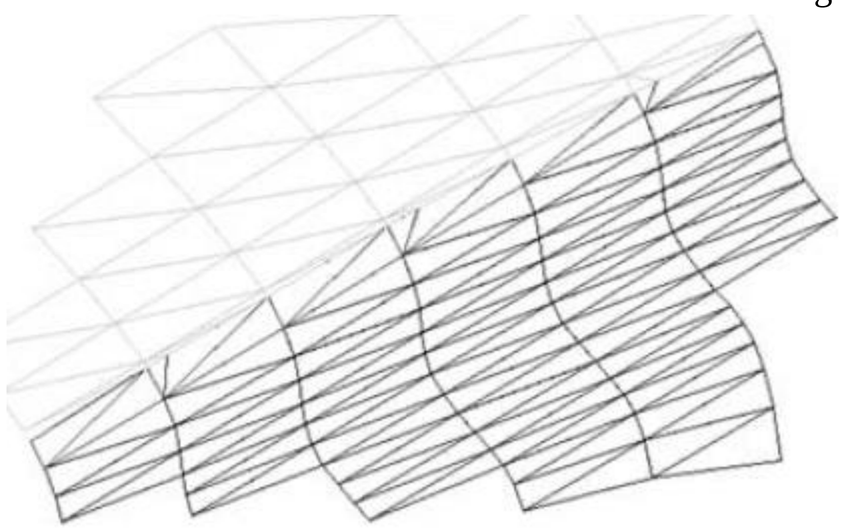


Fig. 12. Retriangulation in the gap.

כאשר האזור האמצעי הוא שילוש החלק שמחבר את סט המשולשים השמאלי (למעלה) ואת הימני .

6.סיכום :

במאמר זה הוצגה גישה איטרטיבית דואלית סגורה IDCP כדי לפתור את הבעיה של רישום תצוגות מרובות .

התרומות העיקריות הן כדלקמן :

1. מבנה נתונים חדש בשם רולטה נועד לאחסן נתונים של קבוצה אחת , זה יכול להאיץ במידה רבה את תהליך ההתאמה של האלגוריתם .

2. לאלגוריתם מוכנס מאפיין נורמל . זה מגדיל באופן משמעותי את הדיוק של האלגוריתם וירידת כמות האיטרציות באופן משמעותי.קריטריון חדש נוסף על מנת להבטיח את ההתכנסות של האלגוריתם .

3. שיטה חדשה של רישות משולש . הרישות המקורי משפיע מעט מאוד . עם זאת הנקודה ההתחלתית עדיין חשוב לדיוק האלגוריתם . למרות שההתכנסות מוודאת כי התשובה המיטבית תימצא .

לעיתים התוצאה היא לא הכי טובה כי ההתכנסות היא מקומית בלבד .